durumda $N(A)^\perp = R(A^T)$ ve $N(A^T)^\perp = R(A)$ yazabiliriz. Ayrıca $Ax=b$ kararlı olması $\Leftrightarrow$ $b \in R(A)$ olduğu ve $R(A) = N(A^T)^\perp$ olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç: Eğer A, $m\times n$ tipinde matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ ise ya $Ax=b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^n$ vardır veya öyle $y \in \mathbb{R}^m$ vardır ki $A^T y = 0$ ve $y^T b \neq 0$ dır.

Örk: $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}$ olsun. $N(A)$, $R(A^T)$, $N(A^T)$ ve $R(A)$ bazını ve boyutunu bul.

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x_2+x_3=0$

$x_3=\alpha$

$x_2=-\alpha$

$x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=\alpha$

$$N(A)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$N(A)$'nın bir bazı $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ dir. $boy(N(A))=1$

$$R(A^T)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$R(A^T)$'nin bir bazı $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ dir.

$boy(R(A^T))=2$

$N(A)^\perp = R(A^T)$

$boy\,\mathbb{R}^3 = boy\,N(A) + boy\,R(A^T)$

$x=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}\in N(A)$ $\quad \begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}\in R(A^T)$

$x^T y = 0$ $\quad \begin{bmatrix}2&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}=0$

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x_2+x_3=0$

$x_3=\alpha$

$x_2=-\alpha$

$x_1+2x_2+x_3=0 \Rightarrow x_1=\alpha$ $\quad x=\begin{bmatrix}\alpha\\-\alpha\\\alpha\end{bmatrix}$

$$N(A^T)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$N(A^T)$'nin bir bazı $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ dir.

$boy\,N(A^T)=1$

$$R(A)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$R(A)$'nın bir bazı $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ dir.

$boy\,R(A)=2$

L: 

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \to Ax$

$m\times n$ tipindeki bir A matrisi $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm olarak düşünüldüğünde ve $R(A^T)$ ve $N(A)$'nın $\mathbb{R}^n$'de dik tümleyen oldukları bilindiğinde

$$\mathbb{R}^n = R(A^T) \oplus N(A)$$

olduğunu görmek zor değildir. Buna göre $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $y\in R(A^T)$ ve $z\in N(A)$ olmak üzere

$$x = y+z$$

olarak tek türlü yazabiliriz. $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\}$$

$$Ax = A(y+z) = Ay + Az = Ay$$

dır. Dolayısıyla

$$R(A)=\{Ax : x\in\mathbb{R}^n\} = \{Ay : y\in R(A^T)\}$$

dır. Yani A'nın tanım kümesini $R(A^T)$ aldığımızda A, $R(A^T)$'den $R(A)$'ya örtendir. (üzerinedir) Ayrıca bu dönüşüm bire-birdir. Gerçekten

$Ay_1 = Ay_2$

$Ay_1 - Ay_2 = 0 \Rightarrow A(y_1-y_2)=0$

$y_1-y_2 \in N(A)$ $\quad y_1, y_2 \in R(A^T)$ olduğundan

$y_1-y_2 \in R(A^T)$

ve $N(A)\cap R(A^T)=\{0\}$

olduğundan $y_1-y_2=0 \Rightarrow y_1=y_2$ dır.

Dolayısıyla $R(A)$'dan $R(A^T)$'ye ters dönüşüm tanımlanabilir.

Örk: $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$ $\quad 2\times 3$ $\quad A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^3 : Ax=0\}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1=0$

$x_2=0$

$x_3=\alpha$

2×3 $\quad 3\times 1$

$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$R(A^T) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$AX = Ay$

$x \in N(A) \quad AX = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

$y \in R(A^T) \quad Ay = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$

$A : R(A^T) \to R(A) \quad \cancel{b = Ax} \quad b = Ay$

$B : R(A) \to R(A^T)$

$Ay = b \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

İç Çarpım Uzayları

Skalar çarpım yalnız $\mathbb{R}^n$'de değil genel vektör uzaylarında da önemli bir kavramdır. Şimdi bu tanımı diğer vektör uzaylarına genelleyelim.

Tanım: Bir V vektör uzayındaki her x ve y vektör çiftine, bir reel sayı $\langle x,y \rangle$ karşılık getiren ve aşağıdaki şartları sağlayan işleme V vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım denir.

1) $\langle x,x \rangle \geq 0$ ve $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) Her $x,y \in V$ için $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
3) Her $x,y,z \in V$ ve bütün α, β skalerleri için $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

Üstünde iç çarpım tanımlı vektör uzayına iç çarpım uzayı denir.

Örnek 1) $\mathbb{R}^n$'de skaler çarpım bir iç çarpımdır.

$\langle x,y \rangle = x^T y$

1) $\langle x,x \rangle = x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$

$\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \langle x,x \rangle = 0$

2) $\langle x,y \rangle = x^T y = y^T x = \langle y,x \rangle$

3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = (\alpha x + \beta y)^T z$
$= (\alpha x^T + \beta y^T) z$
$= \alpha x^T z + \beta y^T z$
$= \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$'de standart iç çarpım denir.

2) $\mathbb{R}^n$'de pozitif elemanları olan bir w vektörü verilsin. ($w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$)

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i w_i$$

bir iç çarpımdır.

w_i'lere iç çarpımın ağırlıkları denir. $w_i = 1$ $i = 1,2,\dots,n$ alınırsa standart iç çarpım elde edilir.

3) $\mathbb{R}^{m \times n}$'de A ve B iki matris olsun. $\mathbb{R}^{m \times n}$'de bir iç çarpımı

$$\langle A,B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

olarak tanımlayabiliriz.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$\langle A,B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23}$

4) $C[a,b]$'de iç çarpımı

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

olarak tanımlayabiliriz.

(Örneğin iç çarpım şartının üçüncüsünü görelim: $f,g,h \in C[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] h(x) dx$

$= \int_a^b [\alpha f(x) h(x) + \beta g(x) h(x)] dx$

$= \int_a^b \alpha f(x) h(x) dx + \int_a^b \beta g(x) h(x) dx$

$= \alpha \int_a^b f(x) h(x) dx + \beta \int_a^b g(x) h(x) dx$

$= \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle g,h \rangle$)

5) $C[a,b]$'de başka bir iç çarpımı $w(x)$ $[a,b]$'de pozitif sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$$

olarak tanımlayabiliriz. $w(x)$'e ağırlık fonksiyonu denir.

6) $x_1, x_2, \dots, x_n$ farklı reel sayılar olsun. P_n'de bir iç çarpım

$$\langle p,q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) q(x_i)$$

olarak tanımlayabiliriz.

307

7) $w(x)$ pozitif fonksiyon ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ farklı reel sayılar olmak üzere P_n'de başka bir iç çarpım,

$$\langle p,q\rangle = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, q(x_i)\, w(x_i)$$

olarak tanımlayabiliriz.

İç çarpım uzaylarının temel özellikleri

$\mathbb{R}^n$'deki skaler çarpımın özelliklerini iç çarpım uzayına genelleyebiliriz. Eğer v iç çarpım uzayı V'de bir vektör ise v'nin uzunluğu veya normu

308

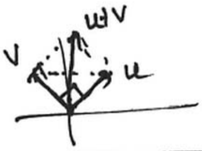
$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\langle u,v\rangle = 0$ ise u ve v vektörlerine diktir denir.

Teorem: (Pisagor kuralı) Eğer u ve v bir iç çarpım uzayı V'de dik iseler

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

dir.



309

Örk 1) $C[-1,1]$'de iç çarpım (örk 4)'teki gibi tanımlansın. ($\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$)

$f(x)=1 \quad g(x)=x$

$$\langle 1,x\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

1 ve x fonksiyonları diktir. Buna göre pisagor kuralı geçerlidir.

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx} = \sqrt{2}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

310

$$\|1\|^2 + \|x\|^2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = \|1+x\|^2$$

$$\|1+x\|^2 = \langle 1+x, 1+x\rangle$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (1+2x+x^2)\,dx$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

2) $C[-\pi,\pi]$'de ağırlıklı fonksiyon sabit $w(x) = \frac{1}{\pi}$ alınırsa ve iç çarpım

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

olarak tanımlanırsa (örk 5'deki gibi) $\cos x$ ve $\sin x$

311

$$\langle \cos x, \sin x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x\,dx \quad \begin{bmatrix} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int u\,du \left(= \frac{1}{\pi}\frac{u^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

$$\|\cos x\|^2 = \langle \cos x, \cos x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= 1$$

312

$$\|\sin x\|^2 = \langle \sin x, \sin x\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx = 1$$

$$\|\sin x + \cos x\|^2 = \|\sin x\|^2 + \|\cos x\|^2$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$R^{m\times n}$'de (örnek 3) tanımlanan iç çarpıma göre alınan norma Frobenius normu denir ve $\|\cdot\|_F$ ile gösterilir. Buna göre eğer $A \in R^{m\times n}$ ise

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

313

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad A, B \in R^{3\times 2}$

$\|A\|_F = ?$ $\quad \|B\|_F = ?$ $\quad \langle A,B\rangle = ?$

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^2}$$

$$= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{31}^2 + a_{32}^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2}$$

$$= 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2 + (-3)^2 + 4^2} = 6$$

314

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32}$$

$$= 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-3) + 3\cdot 4$$

$$= 6$$

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$\langle A,B\rangle = 0 \qquad \|A\|^2 = 9$

$\|B\|^2 = 81$

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = 9 + 81 = 90$$

315

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 8 & 3\end{bmatrix} \quad \|A+B\|^2=90$$

5) P_5'de iç çarpımı (örk 6)'daki gibi tanımlarsak ve $x_i=\frac{i-1}{4}$, $i=1,2,3,4,5$ $(x_1=0,\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=\frac{2}{4},\dots)$ olsun. $p(x)=4x$ ise $p(x)$'in uzunluğunu bulunuz.

$$\|p(x)\|=\sqrt{\langle p,p\rangle}$$

$$\langle p,p\rangle=\sum_{i=1}^{5}p(x_i)\,p(x_i)=\sum_{i=1}^{5}p^2(x_i)$$

317

Teorem: p, u'nun v üzerine vektör izdüşümü ve $v\neq 0$ ise

a) $u-p$ ve p diktir

b) $u=p \iff u$, v'nin skaler katı ise

Teorem: (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) u ve v, iç çarpım uzayı V'de iki vektör ise

$$|\langle u,v\rangle|\leq \|u\|\,\|v\|$$

dir.

316

$$\langle p,p\rangle=[p(0)]^2+[p(\tfrac{1}{4})]^2+[p(\tfrac{2}{4})]^2+[p(\tfrac{3}{4})]^2+[p(1)]^2$$

$$=0+1^2+2^2+3^2+4^2=30$$

$$\|p(x)\|=\sqrt{30}$$

Tanım: u ve v, iç çarpım uzayı V'de iki vektör ve $v\neq 0$ ise u'nun v üzerinde skaler izdüşümü

$$\alpha=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|}$$

ve u'nun v üzerine vektör izdüşümü

$$p=\alpha\left(\frac{v}{\|v\|}\right)=\frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$$

olarak verilir.

318

Ortonormal kümeler

$\mathbb{R}^n$'de sık sık kullandığımız baz takımı $\{e_1,e_2\}$ (dik ve birim uzunlukta) bize nasıl kolaylık sağlıyorsa, iç çarpım uzaylarında da ortonormal (dik ve uzunluğu 1 olan vektörler) baz takımı benzer kolaylık sağlar.

Tanım: $v_1,v_2,\dots,v_n$ iç çarpım uzayı V'de vektörler olsun. Eğer $i\neq j$ iken

$$\langle v_i,v_j\rangle=0$$

ise $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ vektörlerine dik (ortogonal) küme denir.

319

Örk: $\mathbb{R}^3$'de $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$ dik kümedir.

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\rangle=1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot(-3)=0$$

Teorem: Eğer $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ iç çarpım uzayı V'de sıfırdan farklı vektörlerin dik kümesi ise $v_1,v_2,\dots,v_n$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Tanım: Bir iç çarpım uzayı V'de birim vektörlerin dik kümesine ortonormal (dik ve vektörlerin uzunluğu 1 olan) küme denir.

321

$$\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$\left\|\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{14} \qquad \left\|\begin{bmatrix}-4\\5\\1\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{42}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2/\sqrt{14}\\1/\sqrt{14}\\-3/\sqrt{14}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4/\sqrt{42}\\-5/\sqrt{42}\\1/\sqrt{42}\end{bmatrix}\right\}$$

ortonormaldir.

320

$$\{u_1,u_2,\dots,u_n\}\text{ ortonormal} \iff \langle u_i,u_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Her dik küme $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

$$u_i=\frac{v_i}{\|v_i\|} \quad i=1,2,\dots,n$$

alınarak ortonormal yapılabilir.

Örk 1) $\mathbb{R}^3$'de $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$

dik olduğunu biliyoruz.

322

2) iç çarpım uzayı $C[-\pi,\pi]$'de

(iç çarpım $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$)

$\{1,\cos x,\cos 2x,\dots,\cos nx\}$ diktir

$\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\cos 2x,\dots,\cos nx\}$ ortonormaldir.

$$\left\|\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right\|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx=1$$

$$\|\cos x\|=1$$

$$\|\cos nx\|=1$$

$$\langle\cos mx,\cos nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$